

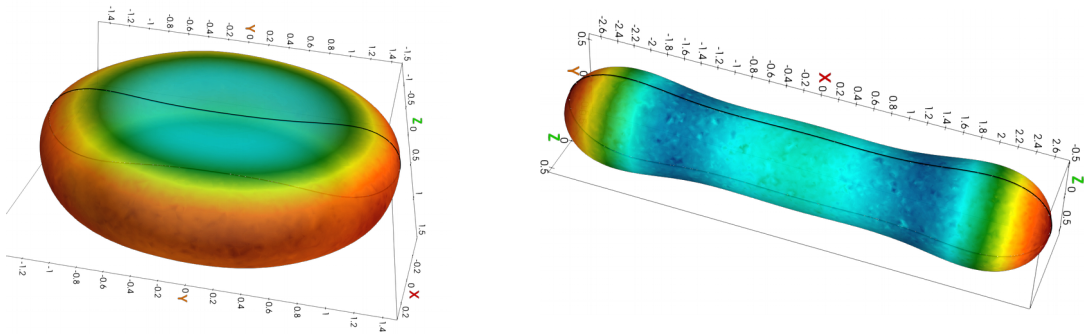
PhD proposal: *Modelling and simulation of immersed surfaces with high order geometric energies using diffusion-redistancing schemes*

Advisors:

Emmanuel Maitre (PR au laboratoire Jean Kuntzmann), emmanuel.maitre@grenoble-inp.fr
Thibaut Métivet (CR INRIA au laboratoire Jean Kuntzmann), thibaut.metivet@inria.fr

Lab : [Laboratoire Jean Kuntzmann \(LJK\)](#),

Teams: [Equations aux Dérivées Partielles \(EDP\) / ModELisation de l'Apparence des phénomènes Non-linéaires \(ELAN\)](#)



Context

The [Partial Differential Equations](#) (PDE) team at the Jean Kuntzmann Laboratory (LJK) has been developing for several years an activity around the interaction of elastic bodies with a fluid in which they are immersed. This work is often done in interaction with applied mathematicians and physicists from the Interdisciplinary Laboratory of Physics (LiPhy), who in particular study the behavior of biological membranes in flow (eg: red blood cells). Ad-hoc finite difference or particle type calculation codes have been developed, as well as a versatile finite element library (Feel ++, <http://www.feelpp.org/>), developed within a collaboration between Inria, the LJK and the University of Strasbourg (CEMOSIS) and used as a scientific calculation tool in several co-supervised theses on the subject (eg [10], defended in July 2019).

At the same time, the Inria ELAN team (<https://team.inria.fr/elan/>) from this same laboratory is interested in the dynamics of complex non-linear objects such as hair, textiles or granular materials, with an original positioning at the interface of computer graphics and applied mathematics. In this context, the development of robust and efficient algorithms for physical simulation is crucial for scaling up and taking into account visually rich effects in large systems.

In the recent thesis of Arnaud Sengers [10], a methodology based on a diffusion of the distance function to the immersed surface [8] to approximate the real motion in an economical way has been successfully implemented to compute equilibrium shapes of vesicles. These are in fact particularly representative of the objects that we wish to address in our modeling: their membrane is inextensible and their shape is dictated by Willmore energy, which gives them a strongly non-linear mechanical behavior. The usual approach requires calculating the gradient of this energy which naturally leads to non-linear equations of order 4. On the contrary, our approach allows to approach this movement by solving only linear diffusion equations of an initial signed distance function to the interface, for various time steps, and to combine them to obtain an approximation of this nonlinear motion. Combined with a projective method to conserve volume and area of these objects, this strategy allows an efficient and stable calculation of the forces which govern the mechanics of such membranes.

As this method has been validated for obtaining equilibrium forms, it remains to be used in the context of a complete fluid-structure coupling method, in order to make the numerical scheme more robust and

stable. On the other hand, the general nature of the approach suggests many other application frameworks, such as the simulation of fabrics in interaction with the air that surrounds them.

In this full Eulerian approach developed in Grenoble [2,4,5,7], we use the “Level Set” method which represents the surface considered as the zero level set of an auxiliary function rather than a material parametric characterization (see for example <http://math.berkeley.edu/~sethian/> or the book [1]). This allows to rewrite the complicated problem of coupling between the fluid and the structure in the form of a complex fluid, therefore completely in Eulerian coordinates. The mathematical analysis of the properties of the model as well as its simulation are thus significantly simplified.

However, the implementation of these problems of fluid-structure coupling in Eulerian form poses problems of numerical stability in certain contexts, in particular when the immersed elastic object is very rigid. Our research is therefore oriented towards the development of numerical diagrams making it possible to overcome at least in part these stability problems, in the context of submerged solids [6].

If completely implicit coupling schemes theoretically avoid stability problems, in this case they involve the resolution of ill-conditioned systems that are difficult to analyze algebraically. It therefore appears preferable in this context to use and extend the method developed in Arnaud Sengers' thesis to build semi-implicit diagrams of the coupling of one or more elastic surfaces with a surrounding fluid, in order to benefit from the methods robust of pre-conditioning developed for the “mono-physical” problems while strongly relaxing the restrictions on the time step related to stability.

Thesis topic

It is in this context that the proposed thesis subject fits.

A first step will be to build and validate a fluid-structure coupling scheme from the diffusion method described above, to calculate the interaction of an elastic surface with a surrounding fluid.

The numerical scheme will be implemented within the framework of the FEEL ++ finite element library, and numerical convergence tests will be carried out.

This approach will then be generalized to the case of several surfaces, in order to take into account the interaction of these in flow.

Finally, we will study the generalization of this approach to other problems presenting a surface driven by geometric energies of high order in interaction with a surrounding fluid, as for example the case of a fabrics falling under the effect of gravity. in the air over a rigid obstacle.

References

- [1] S. Osher and R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer.
- [2] G.-H. Cottet, E. Maitre et T. Milcent, Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM-Math. Model. Numer. Anal.*, 42 (3), 471–492, 2008. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00297711/fr/>
- [3] C. Prud'homme, V. Chabannes, V. Doyeux, M. Ismail, A. Samake, et Gonçalo Pena, *Feel++: A Computational Framework for Galerkin Methods and Advanced Numerical Methods*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00662868v3>
- [4] V. Doyeux, Y. Guyot, C. Prud'homme et M. Ismail, Simulation of two-fluid flows using a Finite Element/level set method. Application to bubbles and vesicle dynamics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 2013, 246, pp.251-259.
- [5] E. Maitre, C. Misbah, Ph. Peyla et A. Raoult. Comparison between advected-field and level-set methods in the study of vesicle dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, 2012, 241 (2012), pp.1146-1157. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00460668>

- [6] G.-H. Cottet et E. Maitre, A semi-implicit level set method for multiphase flows and fluid–structure interaction problems, *Journal of Computational Physics*, Volume 314, 2016, Pages 80-92, ISSN 0021-9991, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.03.004>.
- [7] T. Milcent, and E. Maitre, (2016). Eulerian model of immersed elastic surfaces with full membrane elasticity. *Communications in Mathematical Sciences*, 14(3), 857-881.
- [8] S. Esedoglu, S. Ruuth, and R. Tsai (2010). Diffusion generated motion using signed distance functions. *Journal of Computational Physics*, 229(4), 1017-1042.
- [9] A. Sengers, T. Métivet, M. Ismaïl and E. Maitre (2020), Diffusion-redistanciation schemes for 2D and 3D constrained Willmore flow: application to equilibrium shapes of vesicles, to appear <https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-02905870v2> .
- [10] Arnaud Sengers. Schémas semi-implicites et de diffusion-redistanciation pour la dynamique des globules rouges. *Analyse fonctionnelle [math.FA]*. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. ⟨NNT : 2019GREAM032⟩. ⟨tel-02341602⟩

Sujet de thèse : *Modélisation et simulation de surfaces immergées à énergies géométriques d'ordre élevé par schémas de diffusion*

Encadrants :

Emmanuel Maitre (PR au laboratoire Jean Kuntzmann), emmanuel.maitre@grenoble-inp.fr
Thibaut Métivet (CR INRIA au laboratoire Jean Kuntzmann), thibaut.metivet@inria.fr

Lieu : [Laboratoire Jean Kuntzmann \(LJK\)](#),

Equipes : [Equations aux Dérivées Partielles \(EDP\) / ModELisation de l'Apparence des phénomènes Non-linéaires \(ELAN\)](#)

Contexte

L'équipe [Equations aux Dérivées Partielles](#) (EDP) du Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK) développe depuis plusieurs années une activité autour de l'interaction de corps élastiques avec un fluide dans lequel ils sont immergés. Ces travaux se font souvent en interaction avec des mathématiciens appliqués et physiciens du Laboratoire Interdisciplinaire de Physique (LiPhy), qui étudient notamment le comportement de membranes biologiques en écoulement (ex : globules rouges). Des codes de calcul *ad-hoc*, de type différences finies ou particulières ont été développés, ainsi qu'une bibliothèque éléments finis versatile (Feel++, <http://www.feelpp.org/>), développée au sein d'une collaboration entre l'Inria, le LJK et l'Université de Strasbourg (CEMOSIS) et utilisée comme outil de calcul scientifique dans plusieurs thèses co-encadrées sur le sujet (e.g. [10], soutenue en juillet 2019).

Parallèlement, l'équipe Inria ELAN (<https://team.inria.fr/elan/>) de ce même laboratoire s'intéresse à la dynamique d'objets complexes non-linéaires comme les cheveux, les textiles ou encore les matériaux granulaires, avec un positionnement original à l'interface de l'informatique graphique et des mathématiques appliquées. Dans ce contexte, le développement d'algorithmes robustes et efficaces pour la simulation physique s'avère crucial pour le passage à l'échelle et la prise en compte d'effets visuellement riches au sein de grands systèmes.

Dans la récente thèse d'Arnaud Sengers [10], une méthodologie basée sur une diffusion de la fonction distance à la surface immergée [8] pour en approcher le mouvement réel de manière économique a été mise en œuvre avec succès pour calculer les formes d'équilibre de vésicules. Celles-ci sont en effet particulièrement représentatives des objets que nous souhaitons adresser dans notre modélisation : leur membrane est inextensible et leur forme est dictée par l'énergie de Willmore, ce qui leur confère un comportement mécanique fortement non-linéaire. L'approche usuelle nécessite de calculer le gradient de cette énergie ce qui mène naturellement à des équations non-linéaires d'ordre 4. Au contraire, notre approche permet d'approcher ce mouvement en résolvant uniquement des équations de diffusion linéaires à partir d'une distance à l'interface, pour différents pas de temps, et de les combiner pour obtenir une approximation de ce mouvement non linéaire. Combinée à une méthode projective de conservation du volume et de l'aire de ces objets, cette stratégie permet un calcul efficace et stable des forces qui gouvernent la mécanique de telles membranes.

Cette méthode étant validée pour l'obtention des formes d'équilibre, il reste à s'en servir dans le cadre d'une méthode couplage fluide-structure complet, afin de rendre les schémas numériques plus robustes et stables. D'autre part, le caractère général de l'approche suggère de nombreux autres cadres applicatifs, comme par exemple la simulation de textiles en interaction avec l'air qui les environne.

Dans cette approche entièrement eulérienne développée à Grenoble [2,4,5,7], nous utilisons la méthode « Level Set » qui représente la surface considérée comme la ligne de niveau 0 d'une fonction auxiliaire plutôt qu'une caractérisation paramétrique matérielle (c.f. par exemple <http://math.berkeley.edu/~sethian/> ou le livre [1]). Cela permet de réécrire le problème compliqué de couplage entre le fluide et la structure sous la forme d'un fluide complexe, donc complètement en coordonnées eulériennes. L'analyse mathématique des propriétés du modèle ainsi que sa simulation sont ainsi notablement simplifiées.

Cependant la mise en oeuvre de ces problèmes de couplage fluide-structure sous forme eulérienne pose des problèmes de stabilité numérique dans certains contextes, notamment lorsque l'objet élastique immergé est très rigide. Nos recherches s'orientent donc vers la mise au point de schémas numériques permettant de lever au moins en partie ces problèmes de stabilité, dans le cadre de solides immergés [6].

Si les schémas de couplage complètement implicites permettent en théorie d'éviter les problèmes de stabilité, ils impliquent dans ce cas la résolution de systèmes mal-conditionnés et difficiles à analyser algébriquement. Il apparaît donc préférable dans ce contexte de se servir et d'étendre la méthode développée dans la thèse d'Arnaud Sengers pour construire des schémas semi-implicites du couplage d'une ou plusieurs surfaces élastiques avec un fluide environnant, afin de bénéficier des méthodes robustes de pré-conditionnement développées pour les problèmes « mono-physique » tout en assouplissant fortement les restrictions sur le pas de temps liées à la stabilité.

Sujet de thèse

C'est dans ce contexte que le sujet de thèse proposé s'inscrit.

Une première étape sera de construire et de valider un schéma de couplage fluide-structure à partir de la méthode par diffusion décrite ci-dessus, pour calculer l'interaction d'une surface élastique avec un fluide environnant.

Le schéma sera implémenté dans le cadre de la bibliothèque éléments finis FEEL++, et des tests de convergence numérique seront menés.

Cette approche sera ensuite généralisée au cas de plusieurs surfaces, afin de prendre en compte l'interaction de celles-ci en écoulement.

Enfin, on étudiera la généralisation de cette approche à d'autres problèmes présentant une surface pilotée par des énergies géométriques d'ordre élevé en interaction avec un fluide environnant, comme par exemple le cas d'un textile tombant sous l'effet de la gravité dans l'air sur un obstacle rigide.

Bibliographie

- [1] S. Osher and R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer.
- [2] G.-H. Cottet, E. Maitre et T. Milcent, Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM-Math. Model. Numer. Anal.*, 42 (3), 471–492, 2008. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00297711/fr/>
- [3] C. Prud'homme, V. Chabannes, V. Doyeux, M. Ismail, A. Samake, et Gonçalo Pena, *Feel++: A Computational Framework for Galerkin Methods and Advanced Numerical Methods*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00662868v3>
- [4] V. Doyeux, Y. Guyot, C. Prud'homme et M. Ismail, Simulation of two-fluid flows using a Finite Element/level set method. Application to bubbles and vesicle dynamics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 2013, 246, pp.251-259.
- [5] E. Maitre, C. Misbah, Ph. Peyla et A. Raoult. Comparison between advected-field and level-set methods in the study of vesicle dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, 2012, 241 (2012), pp.1146-1157. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00460668>
- [6] G.-H. Cottet et E. Maitre, A semi-implicit level set method for multiphase flows and fluid-structure interaction problems, *Journal of Computational Physics*, Volume 314, 2016, Pages 80-92, ISSN 0021-9991, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.03.004>.

- [7] T. Milcent, and E. Maitre, (2016). Eulerian model of immersed elastic surfaces with full membrane elasticity. *Communications in Mathematical Sciences*, 14(3), 857-881.
- [8] S. Esedoglu, S. Ruuth, and R. Tsai (2010). Diffusion generated motion using signed distance functions. *Journal of Computational Physics*, 229(4), 1017-1042.
- [9] A. Sengers, T. Métivet, M. Ismaïl and E. Maitre (2020), Diffusion-redistanciation schemes for 2D and 3D constrained Willmore flow: application to equilibrium shapes of vesicles, à paraître <https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-02905870v2> .
- [10] Arnaud Sengers. Schémas semi-implicites et de diffusion-redistanciation pour la dynamique des globules rouges. *Analyse fonctionnelle [math.FA]*. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. ⟨NNT : 2019GREAM032⟩. ⟨tel-02341602⟩