# SUJET DE THÈSE (ET MASTER): COMMANDE OPTIMALE DE SORTIE

DIRECTEUR DE THÈSE : MARC JUNGERS (CRAN)
CO-DIRECTEUR : JÉRÔME LOHÉAC (CRAN)
LIEU : CENTRE DE RECHERCHE EN AUTOMATIQUE DE NANCY

Résumé. L'objectif de cette thèse est d'étendre les résultats de commande optimale pour la commandabilité de la sortie d'un système. Plus précisément, on souhaite étendre les résultats de contrôlabilité optimale dans le cas où l'on a seulement accès à la sortie du système. En effet, ici, il ne sera pas supposé que l'état du système est commandable, on supposera simplement que sa sortie est commandable.

## Introduction

Le sujet de thèse présenté ci-dessous peut aussi donné lieu indépendamment à un sujet de stage de Master. Plus précisément, le sujet de Master pourra porter sur l'une des questions soulevée dans ce sujet de thèse.

Nous encourageons toute personne intéressée par un stage de Master sur ce sujet à nous contacter.

## 1. Problématique générale, Contexte

De nombreux résultats existent en commandabilité et commande optimale. Considérons le système de linéaire de dimension finie,

$$(\star)\qquad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases}$$

muni de la condition initiale $x(0) = x^0$. La commandabilité de ce système est assurée par la condition du rang de Kalman (cf. [2]) :

$$\operatorname{rg}\left(B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B\right) = n,$$

avec $n$ la dimension de l'état du système, $x$. Cependant, il est moins connu que la commandabilité de la sortie $y$ est assurée par la condition de rang (cf. [3]) :

$$\operatorname{rg}\left(C\left(B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B\right),\ D\right) = d,$$

avec $d$ la dimension de la sortie $y$ du système. Sous cette condition, pour tout temps $T > 0$, tout état initial $x^0$ et toute sortie finale $y^1$, il existe un contrôle $u \in L^\infty(0, T)$ tel que la solution de $(\star)$ (avec ces conditions initiales) satisfasse $y(T) = y^1$.

Il est évident que la commandabilité du système $(\star)$ implique la commandabilité de la sortie de ce système, sous l'hypothèse $\operatorname{rg} C = d$.

Lorsque le système $(\star)$ est commandable, le théorème de placement des pôles permet de construire un régulateur $K$ tel que le contrôle $u = Kx$ stabilise l'état du système. De plus, si l'on cherche à minimiser le coût :

$$J_{x^0}(u) = \int_0^\infty \left(u(t)^\top R u(t) + x(t)^\top Q x(t)\right) \mathrm{d}t$$

(avec $x^0$ la condition initiale du système $(\star)$ et $x$ la solution correspondante), il s'avère que la solution optimale $u$ s'exprime sous la forme d'un retour d'état statique : $u = Kx$, avec $K$ un régulateur obtenu à l'aide d'une solution d'une équation de Riccati (cf. [6, 8]). Il est à remarquer que cet opérateur $K$ est indépendant de l'état initial du système.

Lorsque l'état entier n'est pas accessible et que seule la mesure de la sortie $y$ est disponible, il est habituel de construire, à l'aide d'un observateur, une estimation $\hat{x}$ de $x$, puis d'utiliser le contrôle $u = K\hat{x}$ (à la place de $u = Kx$). Cependant, cette stratégie ne permet nullement d'assurer l'optimalité de ce contrôle.

courriels : marc.jungers@univ-lorraine.fr et jerome.loheac@univ-lorraine.fr.
Début de la thèse en octobre 2019.
Sujet de Master 2019.

Dans cette thèse, on ne s'intéressera pas à la construction d'un observateur, mais à l'utilisation directe de la sortie. On cherchera donc un contrôle sous la forme d'un retour de sortie $u = Fy$.

## 2. Objectifs de la thèse

Dans un premier temps, il conviendra de s'intéresser au cas des systèmes linéaires. Une extension au cas des systèmes non-linéaires affines pourra être envisagée dans un second temps. Les questions soulevées ci-dessous pourront aussi être abordées dans le cadre des systèmes à temps discret.

La problématique de la thèse est d'explorer plus en détails les questions de contrôle optimal de sortie. Plusieurs questions se posent naturellement,

— Le coût $J$ est-il bien défini pour toutes conditions initiales ?
En effet, si l'état du système est commandable, alors on peut envoyer $x^0$ sur 0 en un temps $T > 0$, puis prendre le contrôle $u(t) = 0$ pour $t > T$. Cependant, si seule la sortie est commandable, cette stratégie n'est pas possible, en effet, seul $y$ peut être envoyé sur 0. Bien entendu, ceci n'implique pas que $x = 0$. De plus, si $y = 0$ en un certain instant $T \geqslant 0$, le contrôle nul sur $(T, \infty)$ ne permet pas d'assurer que $y(t) = 0$ pour tout $t > T$. Ainsi, même dans le cas où $Q = C^\top SC$, c'est-à-dire dans le cas ou la fonction coût est de la forme :
$$\int_0^\infty \left(u(t)^\top Ru(t) + y(t)^\top Sy(t)\right) \mathrm{d}t,$$
La commandabilité de la sortie n'est pas suffisante pour assurer le caractère non-borné de $x^0 \mapsto \min_u J_{x^0}$.

— Si le minimum de $J_{x^0}$ est fini, les contrôles optimaux peuvent-ils s'écrire sous la forme $u = Fy$ ?
En d'autre termes, avons-nous $\min_u J_{x^0}(u) = \min_F J_{x^0}(Fy)$ ? Si tel est le cas, $F$ peut-il être exprimé comme une solution d'une équation de Riccati ? Peut-on décrire la dépendance de $F$ par rapport à $x^0$ ?

Il a été montré (avec $D = 0$) qu'il est généralement impossible de trouver un contrôle optimal de la forme $u = Fy$, avec $F$ indépendamment de la condition initiale $x^0$, cf. [1]. Plus précisément, si une telle solution existe alors, le régulateur de sortie $F$ satisfait $FC = K$, avec $K$ le régulateur optimal par retour d'état. Une stratégie pour surmonter ces difficultés est de chercher un régulateur $\bar{F}$ *moyen*. Pour ce faire, la donnée initiale est vue comme une variable aléatoire et au lieu de minimiser la fonction coût $J_{x^0}$, on va minimiser l'espérance $\bar{J}$ de cette fonction. Cette approche a été considérée par exemple dans les articles [10] et [4]. Cependant, cette stratégie n'est pas amplement convaincante du point de vue de la minimisation de $J_{x^0}$. En effet, il n'est nullement assuré que le contrôle $u = \bar{F}y$ minimise $J_{x^0}$ pour toute donnée initiale $x^0$.

La problématique décrite ci-dessus se résume à la recherche d'un régulateur statique $F$ tel que le contrôle par retour de sortie statique $u = Fy$ minimise $J_{x^0}$ (ou $\bar{J}$). Notons que cette classe de contrôle par retour d'état statique est assez générale. En effet, bien que les questions posées ci-dessus puissent, être reprises avec un retour de sortie dynamique, c'est-à-dire dans le cas où le contrôle $u$ est donné par $u = C_c\eta + D_cy$, avec $\eta$ une variable auxiliaire solution de $\dot{\eta} = A_c\eta + B_cy$, il a été montré (cf. [7]) qu'un retour de sortie dynamique peut être réinterprété comme une sortie statique pour un système augmenté. Ainsi, une étude approfondie des systèmes avec retour de sortie statique permettra aussi de traiter les mêmes problématiques posées avec un retour de sortie dynamique.

Une autre problématique est de prescrire une sortie $y$ du système. Plus précisément, quelles sont les conditions permettant d'assurer que $y(t)$ reste dans le voisinage d'une (ou sur une) cible $y^1$ ? Pour ce faire, on pourra s'inspirer des résultats contenus dans le livre [9].

Un tel résultat, combiné avec la première problématique de stabilisation, permettrait en effet de faire de la régulation de sortie.

Dans cette thèse, on s'intéressera aux questions susmentionnées. En particulier, on essaiera d'obtenir des conditions nécessaires ou suffisantes pour l'existence d'un contrôle optimal, l'expression de ce contrôle comme un retour de sortie…

Les résultats obtenus pourront, par exemple, être appliqués au cas du contrôle en moyenne, c'est-à-dire des systèmes de la forme :
$$\dot{x}_\theta = A_\theta x + B_\theta u,$$
avec $\theta$ un paramètre incertain suivant une loi de probabilité $\mathbb{P}$, et $u$ un contrôle indépendant du paramètre $\theta$. On cherche alors à contrôler l'espérance des états du système par rapport à cette loi de probabilité $\mathbb{P}$ (cf. [11]), en d'autres termes à contrôler la sortie $y(t) = \int x_\theta(t)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_\theta$. Pour ce problème, si le paramètre $\theta$ ne vit pas dans un ensemble de dimension finie, l'état de ce système est $X = (x_\theta)_\theta$ est de dimension infinie. Cependant, pour les lois de probabilité *classiques* (par exemple normale, uniforme, exponentielle…), en s'inspirant de la méthode décrite dans [5], il sera possible d'approcher ce système de dimension infinie par un système linéaire de dimension finie.

## Cadre du Master

Un sujet de Master peut être construit sur quelques questions soulevées dans celui de la thèse. Par exemple :
- Déterminer les situations où $\min_u J_{x^0}(u) < \min_F J_{x^0}(Fy)$ ;
- Améliorer les conditions de convergences de l'algorithme proposé dans l'article [4] pour la recherche de $\bar{F}$ ;
- Transcrire les résultats existants dans le cadre des systèmes a temps discret ;
- La recherche de contrôles optimaux dans le cadre de la contrôlabilité en moyenne ;
- Rechercher les conditions permettant la poursuite d'une trajectoire de sortie...

## 3. Prérequis pour la thèse

Un Master 2 de recherche ou équivalent est nécessaire pour se porter candidat sur cette offre de thèse.

Ce sujet de thèse requiert des compétences en automatique/mathématiques appliquées. En plus de maîtriser les connaissances de bases de l'automatique, un bagage en contrôle optimal sera souhaitable.

## 4. Candidature

Pour toute personne intéressée par ce sujet, merci d'envoyer vos candidatures à Marc Jungers et Jérôme Lohéac (courriels : `marc.jungers@univ-lorraine.fr` et `jerome.loheac@univ-lorraine.fr`). Les documents requis pour la candidature (thèse ou Master) sont :
- un CV, mentionnant en particulier si vous avez déjà obtenu votre Master 2 recherche ou si vous aller l'obtenir avant cet été, ainsi que le classement que vous avez obtenu avec vos derniers diplômes ;
- derniers relevés de notes ;
- une copie de votre passeport indiquant votre date de naissance, votre lieu de naissance et une adresse actuelle ;
- une lettre de motivation ;
- quelques lettres de recommandation (envoyées directement à nous) ou personne à contacter.

## Références


[1] L. Huang and Z. Li. Solvability of quadratic optimal control via output feedback. *Science in China Series A-Mathematics, Physics, Astronomy & Technological Science*, 33(10) :1238–1245, 1990.

[2] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 5 :102–119, 1960.

[3] E. Kreindler and P. E. Sarachik. On the concepts of controllability and observability of linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-9 :129–136, 1964.

[4] W. Levine and M. Athans. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(1) :44–48, February 1970.

[5] F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, and F. Periago. Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *J. Optim. Theory Appl.*, 174(2) :428–454, 2017.

[6] W. A. Porter. On the matrix Riccati equation. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-12 :746–749, 1967.

[7] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback—a survey. *Automatica J. IFAC*, 33(2) :125–137, 1997.

[8] E. Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications. [Theory and applications].

[9] W. Wonham. Linear multivariable control. A geometric approach. 3rd ed. Applications of Mathematics, 10. New York etc. : Springer-Verlag. XVI, 334 p. , 1985.

[10] Z.-G. Yang and X.-H. Wang. Fundamental theorem for optimal output feedback problem with quadratic performance criterion. In *2006 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, volume 1, pages 1800–1804, June 2006.

[11] E. Zuazua. Averaged control. *Automatica*, 50(12) :3077–3087, 2014.