Proposition de stage de Master

Antoine Henrot - Institut Élie Cartan Nancy

Nous proposons un stage de Master 2 de mathématiques pouvant potentiellement déboucher sur une thèse financée par l'ANR "SHAPO" à partir de septembre 2019 (avec co-encadrement entre Nancy et Chambéry/Grenoble).

Le stage portera sur des questions liant la géométrie spectrale et l'optimisation de forme. La définition précise du sujet pourra évoluer, notamment en fonction des goûts du candidat(e) recruté(e), mais voici quelques exemples de questions qui pourraint être abordées. Soit Ω un ouvert borné (régulier) de $\mathbb{R}^2$, on notera $\sigma_1(\Omega)$ la première valeur propre (non nulle) du problème de Steklov et u_1 une fonction propre associée :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} = \sigma_1 u_1 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

De même on introduit $\mu_1(\Omega)$ la première valeur propre non nulle du problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta v_1 = \mu_1 v_1 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial v_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

On notera aussi $|\Omega|$ l'aire de Ω et $P(\Omega)$ son périmètre.

On peut alors se poser les questions suivantes qui ont des applications potentiellement intéressantes :

1. Est-il vrai qu'on a l'inégalité

   $$|\Omega|\mu_1(\Omega) \geq P(\Omega)\sigma_1(\Omega)\,?$$

   On peut aussi se poser la question plus faible : est-il vrai qu'on a l'implication

   $$|\Omega|\mu_1(\Omega) \to 0 \Rightarrow P(\Omega)\sigma_1(\Omega) \to 0\,?$$

2. Est-il vrai que la fonction propre u_1 satisfait l'inégalité

   $$\frac{1}{P(\Omega)} \int_{\partial\Omega} u_1^2 ds \geq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_1^2 dx$$

   (la moyenne des valeurs de u_1^2 au bord est plus grande qu'à l'intérieur) ?

3. On sait que le disque maximise $P(\Omega)\sigma_1(\Omega)$ dans la classe des ouverts simplement connexes, cf [2], [3, chapter 5], [4] mais qu'il n'est plus maximiseur dans la classe plus générale des ouverts car la couronne $\mathcal{C}_\varepsilon := \{\varepsilon < |x| < 1\}$ donne une plus grande valeur du produit. Est-il vrai que $\mathcal{C}_\varepsilon$ maximise $P(\Omega)\sigma_1(\Omega)$ dans la classe des ouverts doublement connexes ?

Pour tenter de répondre aux questions précédentes, on pourra combiner des méthodes géométriques, analytiques et numériques.

Références

[1] D. Bucur, V. Ferone, C. Nitsch, C. Trombetti, *Weinstock inequality in higher dimensions*, https ://arxiv.org/abs/1710.04587

[2] A. Henrot, Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2006.

[3] A. Henrot (ed.), Shape Optimization and Spectral Theory, De Gruyter Open, Warzaw, 2017.

[4] R. Weinstock, *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J. Rational Mech. Anal., **3** (1954), 745-753.